ÉCOLE NATIONALE DU GÉNIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT
DE STRASBOURG

CONCOURS D'ENTRÉE 2000

ÉPREUVE DE MATHEMATIQUES B

FILIERE PHYSIQUE CHIMIE

DURÉE : 2 heures 30.

N.B. : Ce *sujet comporte 3 pages de texte*

Les deux parties du problème sont indépendantes.

PARTIE I

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ constitué des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n.

On considère $\Delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ défini par:

$$\forall P \in \mathbb{R}[X],\ \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

Enfin soit $\mathcal{N} = (N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par: $N_0(X) = 1$, et:

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad N_k(X) = \frac{1}{k!}\prod_{i=0}^{k-1}(X-i) = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}$$

1°) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(N_0, \dots, N_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Calculer $\Delta(N_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2°) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Préciser son noyau et son image.

3°) Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par Δ. On notera Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par:

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ \Delta_n(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

b) Préciser le noyau et l'image de Δ_n.

c) Préciser la matrice de Δ_n relativement à la base $(N_0, \ldots, N_n)$. Montrer que $(\Delta_n)^{n+1} = 0$.

d) Étudier si Δ_n est diagonalisable.

e) Montrer que:

$$\mathcal{C}_n = \{u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])/ \quad \Delta_n \circ u = u \circ \Delta_n\}$$

est un espace vectoriel de dimension $n+1$ admettant $\left((\Delta_n)^j\right)_{j \in [\![0,n]\!]}$ comme base.

($(\Delta_n)^0$ désigne l'application identité de $\mathbb{R}_n[X]$).

f) Déterminer: $\mathcal{R}_n = \{u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])/ \quad u \circ u = \Delta_n\}$.

4°) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que:

$$P(X) = \sum_{j=0}^{n} \Delta^j(P)(0) N_j(X).$$

b) Montrer que pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, on a:

$$\Delta^j(P)(X) = \sum_{k=0}^{j} C_j^k (-1)^{j+k} P(X+k).$$

c) Montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes:

(i) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $P(k) \in \mathbb{Z}$,

(ii) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\Delta^j(P)(0) \in \mathbb{Z}$.

5°) a) Justifier l'existence et l'unicité d'une famille de polynômes $(B_i)_{i \in \mathbb{N}}$ telle que:

$$\forall i \in \mathbb{N}, \Delta(B_i)(X) = X^i, B_i(0) = 0.$$

b) Calculer B_0, B_1, B_2 et B_3 en fonction des polynômes de $\mathcal{N}$ (on pourra utiliser 4°, a).

c) En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^{m} k^3$ pour tout $m \in \mathbb{N}$ (donner cette valeur sans utiliser B_3 ne rapportera aucun point).

PARTIE II

1°) À tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on associe la série entière F_P définie par:

$$F_P(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{P(k)}{k\,!} x^k$$

a) Déterminer le rayon de convergence d'une telle série entière.

b) Pour tout $j \in \mathbb{N}$, en notant $P_j = j\,! N_j$, calculer la série entière associée F_{P_j}.

c) En déduire que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique $Q_P \in \mathbb{R}[X]$, tel que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_P(x) = e^x Q_P(x)$$

Q_P ayant le même degré que P.

d) Montrer que $P \mapsto Q_P$ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

e) Calculer Q_P lorsque $P(X) = X^2 + 1$.

2°) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k = \displaystyle\int_0^1 N_k(t)\,dt$ (où N_k est défini au début de la partie I).

a) Calculer I_0, I_1 et I_2.

b) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, on a: $\dfrac{1}{6k^2} \leq |I_k| \leq \dfrac{1}{6k}$.

(On commencera par encadrer $|N_k(t)|$ pour $t \in [0,1]$).

c) En déduire le rayon de convergence de la série entière définie par $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} I_k x^k$.

d) Justifier que pour tout $x \in]-1,1[$, $x \neq 0$, on a:

$$\varphi(x) = \int_0^1 (1+x)^t\,dt = \frac{x}{\ln(1+x)}.$$

En déduire: $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_0^1 \frac{2^{1+t}-1}{t+1}\,dt.$

e) Montrer la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} I_k$.

f) Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Pour $t \in [0,1]$, on pose:

$$f_n(t) = \prod_{i=2}^{n-1}(i-t) = (2-t)\ldots(n-1-t).$$

(i) Vérifier que: $\ln(f_n(t)) - \ln((n-2)!) \leq (1-t)\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2}\frac{1}{k} \leq (1-t)\big(1+\ln(n-2)\big)$.

(ii) En déduire: $|I_n| \leq \dfrac{1}{n(n-1)}\displaystyle\int_0^1 u(1-u)e^u(n-2)^u\,du$.

(iii) Conclure (après deux intégrations par parties) que la suite $\big((\ln(n))^2 n I_n\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

g) Montrer que $g : t \mapsto \dfrac{1}{t(\ln(t))^2}$ est intégrable sur $[2,+\infty[$, et en déduire que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}|I_k|$ converge. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} I_k$.

3°) Justifier l'égalité: $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{I_k}{k+1}$.

4°) Pour $x \in]-1,1[$, on pose: $\psi(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(1+x)}$ si $x \neq 0$, et $\psi(0) = -1$.

Montrer que ψ est développable en série entière sur $]-1,1[$, le rayon de convergence de son développement valant 1 (on pourra utiliser φ).

• FIN•